RRC I ROK FIZYKI I ASTRONOMII
LISTA 6

1. Podaj definicje Heinego i Cauchy'ego rozbieżności funkcji f do nieskończoności, gdy
a) $x \to x_0^-$,
b) $x \to \infty$.

2. Niech f będzie funkcją określoną w pewnym sąsiedztwie punktu $x_0 = 0$. Wykaż, że
a) jeżeli f jest parzysta, to $\lim_{x\to 0^+} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = g$,
b) jeżeli f jest nieparzysta, to $\lim_{x\to 0^+} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = -g$,

3. Wykaż z definicji Heinego, że

$$\text{a) } \lim_{x\to 1}(x^2 + x^3) = 2 \qquad \text{b) } \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^4-1} = -\frac{3}{4}$$

4. Wykaż z definicji Cauchy'ego, że

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} x^k = 1, \quad k \in \mathbf{N} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 0$$

5. Udowodnij, że

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} a^x = 1, \quad a > 0$$

$$\text{c) } \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \qquad \text{d)}^* \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \quad r \in \mathbf{Q},\ r > 0$$

6. Oblicz

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} \qquad \text{e) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$$

7. Zbadaj istnienie granicy

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right], \quad a > 0,\ b > 0$$

8. Dla jakiej wartości parametru A istnieje granica $\lim_{x\to 0} f(x)$, jeżeli

$$f(x) \ = \ \begin{cases} \frac{\sin Ax}{x} \ + \ \cos(Ax) \ : & x > 0 \\ \frac{(x+A)^2 - A^2}{x} \ : & x < 0 \end{cases}$$

9. Wykaż z definicji Cauchy'ego, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} \ = \ 0$$

10. Wykaż, że dla $a > 1$ zachodzi $\lim\limits_{x\to\infty} a^x \ = \ \infty$ oraz $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x \ = \ 0$

11. Zbadaj istnienie granicy

$$\text{a)} \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x} \qquad \text{b)} \ \lim_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x^2}}$$

12. Oblicz $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ dla $f(x) \ = \ \sqrt{x(x \ - \ \sqrt{x^2-1})}$.

13. Wyznacz następujące granice

$$\text{a)} \ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[k]{x}}, \quad k \in \mathbf{N} \qquad \text{b)} \ \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} \qquad \text{c)} \ \lim_{x\to 0}(1 \ + \ \sin x)^{\frac{1}{x}}$$

14.* Niech $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ będzie funkcją ograniczoną i taką, że

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{a}{n}) \ = \ 0$$

dla $\forall a \neq 0$. Czy wynika stąd, że $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$?

Robert Olkiewicz